# 代数不等式及竞赛真题演练

万捷

北京理工大学，数学与统计学院

2024 年 1 月 30 日


新春愉快
欢度春节
龙年大吉
新年快乐
Happy New Year
万事如意
新年快乐

1. 基本不等式

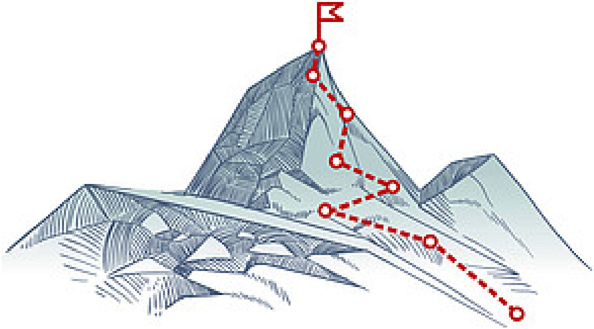
2. 数学归纳法

3. 不等式的证明方法与技巧

高中数学联赛二试题型：平面几何 $+$ 不等式 $+$ 数论 $+$ 组合。

1. 平面几何 (40).
2. 不等式 (40).
3. 数论 (50).
4. 组合 (50).

# 不等式问题：登山



基本不等式理论 + 做题训练不等式技巧 + 真题演练 = 成功！！！

# 几个重要的不等式

- 先看一个简单的例子。

若 $a, b > 0$, 则
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

# 直观

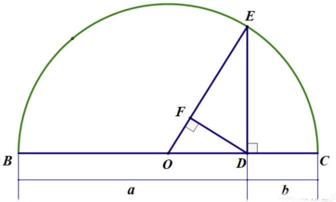



图: 算术-几何-调和平均值不等式几何图形

因为三角形 DEF 与三角形 ODE 相似，所以

$$EF \cdot OE = DE^2, \quad EF \cdot \frac{a+b}{2} = ab, \quad EF = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},$$

1. **算术-几何-调和平均值不等式**

**均值不等式**

设 $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^+$, 则

$$\frac{x_1 + x_2 \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}, \tag{1}$$

其中等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时取到。

上式又写成 **“算术平均值”**≥**“几何平均值”**≥**“调和平均值”**。

# 推论

- $a+b \geq 2\sqrt{ab}$.
- $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.
- $2ab \leq a^2+b^2$.
- $3abc \leq a^3+b^3+c^3$.
- $\sqrt{2(a^2+b^2)} \geq a+b$.

2. **Cauchy(柯西) 不等式**

**Cauchy-Buniakowsky-Schwarz 不等式**

设 $a_i, b_i \in \mathbb{R}/\{0\}, i = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2), \tag{2}$$

其中等号当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ 时取到。

# 法国数学家-柯西

图: 法国数学家-Cauchy

17-18 世纪，法国涌现出一大批群星般璀璨的数学名家，奥古斯丁路易柯西 (Augustin Louis Cauchy,1789-1857)，便是其中最耀眼的名家之一。他在应用数学和纯数学上有着很深的造诣，像" 柯西不等式" " 柯西积分公式" 等数学定理和公式都是以他的名字来命名的。

## 2. Cauchy 不等式

设 $a_i, b_i \in \mathbb{R}/\{0\}, i = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2),$$

其中等号当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ 时取到。

- 柯西不等式可理解为: 设 n 维欧氏空间中的两个向量 $A = (a_1, \cdots, a_n), B = (b_1, \cdots, b_n)$，则柯西不等式等价于

$$|A \cdot B| \leq |A||B|.$$

- 推论：$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 \leq n(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)$，$(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i b_i})^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i)$.

# 直观

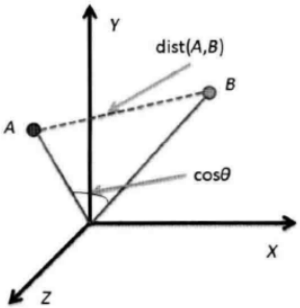



图: Cauchy 不等式几何图形

### 3. 幂平均不等式 ($J(\alpha) \geq J(\beta)$)

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0, \alpha > \beta$, 则

$$\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \tag{3}$$

其中等号当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时成立。

- 定义 $J(\alpha) = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. 则上式等价于

$$J(\alpha) \geq J(\beta), \quad \forall \alpha > \beta.$$

- 与均值不等式的联系。

# 基本不等式

4. **排序不等式**

设 $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n, 0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \leq a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \cdots + a_n b_{i_n} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \tag{4}$$

这里 $(i_1, \cdots, i_n)$ 是 $1, \cdots, n$ 的任意排序。

• 排序不等式可理解为：**顺序求和** $\geq$ **乱序求和** $\geq$ **反序求和**。排序不等式有如下常用推论：设 $a, b \in \mathbb{R}^+, p, q > 0$, 则

$$a^{p+q} + b^{p+q} \geq a^p b^q + a^q b^p. \tag{5}$$

其中等号当且仅当 $a = b$ 时取到。

# 直观

| 对应关系 | 和 | 备注 |
| --- | --- | --- |
| (1,2,3) (25,30,45) | $S_1 = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 220$ | 顺序和 |
| (1,2,3) (25,45,30) | $S_2 = a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 = 205$ | 乱序和 |
| (1,2,3) (30,25,45) | $S_3 = a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_3 = 215$ | 乱序和 |
| (1,2,3) (30,45,25) | $S_4 = a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 = 195$ | 乱序和 |
| (1,2,3) (45,25,30) | $S_5 = a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_2 = 185$ | 乱序和 |
| (1,2,3) (45,30,25) | $S_6 = a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 = 180$ | 反序和 |

发现:反序和≤乱序和≤顺序和.

图: 排序不等式原理

## 5. 车比雪夫 (Chebyshev) 不等式

设两个正数序列 $\{a_n\}, \{b_n\}$,

(1) 若 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n, b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ge (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i); \tag{6}$$

(1) 若 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n, b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i). \tag{7}$$

# 俄国数学家-车比雪夫

图: 俄国数学家-车比雪夫

车比雪夫 (1821-1894 年)，俄罗斯数学家、力学家。他一生发表了 70 多篇科学论文，内容涉及数论、概率论、函数逼近论、积分学等方面。他证明了贝尔特兰公式，自然数列中素数分布的定理，大数定律的一般公式以及中心极限定理。他不仅重视纯数学，而且十分重视数学的应用。

### 6. **权方和不等式**

设 $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^+$, $y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{R}^+$, 若 $m > 0$ 或 $m < -1$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{m+1}}{y_i^m} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{m+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^m}. \tag{8}$$

若 $-1 < m < 0$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{m+1}}{y_i^m} \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{m+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^m}. \tag{9}$$

上述两不等式等号均当且仅当 $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$ 时取得。

7. **琴生 (Jensen) 不等式**

- 定义**下凸函数**：$\forall x_1, x_2$,

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2)).$$

- 例：$f(x)=x^2$.

# 几何解释

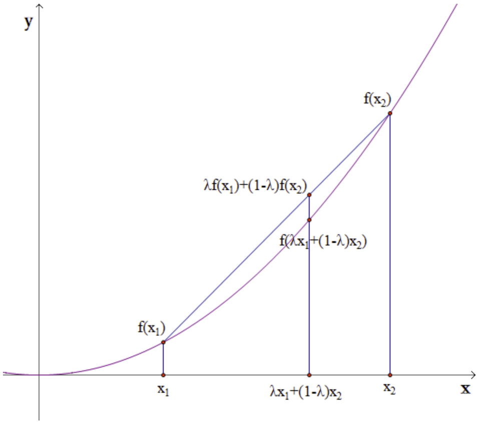



图: Jensen 不等式几何图形

## 琴生不等式

若连续函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 内下凸 (或上凸)，则对任意 $x_1, \cdots, x_n \in I$ 及任意 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$, 且 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, 必有

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n), \quad (10)$$

或

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n), \quad (11)$$

其中等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时取到。

- 特别地，取 $\lambda_i = \frac{1}{n}$, 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right).$$

**8. 舒尔 (Schur) 不等式**

设 $x, y, z \geq 0$, $r$ 是实数，则

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-x)(y-z) + z^r(z-y)(z-x) \geq 0. \tag{12}$$

当 $r = 1$ 时，Schur 不等式有几种变形：

(1) $x^3 + y^3 + z^3 - (x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2) + 3xyz \geq 0$;

(2) $(x+y+z)^3 - 4(xy+yz+xz)(x+y+z) + 9xyz \geq 0$;

(3) $xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$.

# 舒尔 (I. Schur, 1875-1941)

# 数学归纳法

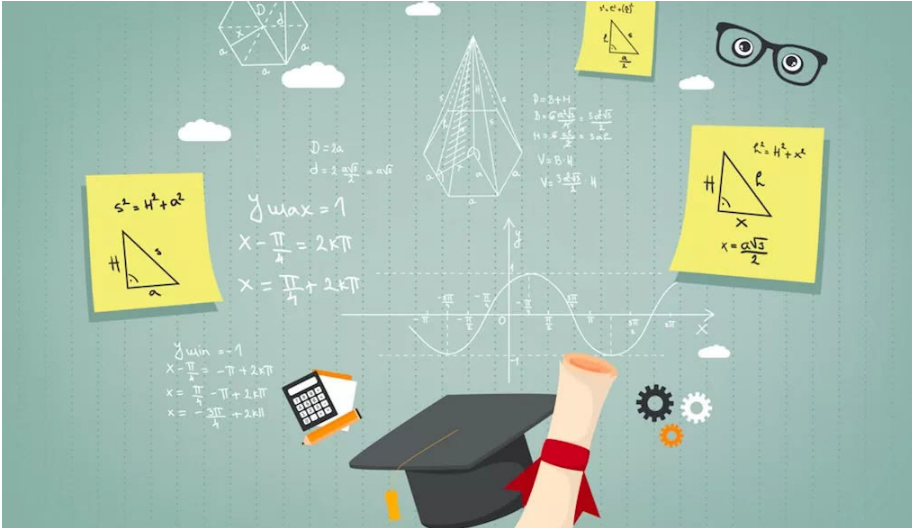
1. 常见情形 (**第一数学归纳法**).
2. **第二数学归纳法** (完整归纳法).
3. **从 0 以外的数字开始.**
4. 针对奇数或偶数 (**跳跃归纳法**).
5. 倒推归纳法 (**反向归纳法**).
6. **螺旋归纳法.**

# 不等式的证明方法与技巧

- 通过真题的演练挖掘不等式问题常用的方法与技巧。

1. 凑。
2. 配。
3. 消。
4. 合。
5. 代。

不妨设，数形结合，反证法，中间不等式，构造辅助函数...



$s^2=H^2+a^2$
$D=2a$
$y_{max}=1$
$x-\frac{\pi}{4}=2k\pi$
$x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$
$V=B\cdot H$
$l^2=H^2+x^2$
$x=\frac{a\sqrt{3}}{2}$
$y_{min}=-1$
$x-\frac{\pi}{4}=-\pi+2k\pi$
$x=\frac{\pi}{4}-\pi+2k\pi$
$x=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

# 谢谢大家!